Baccalauréat Blanc

Mathématiques

Terminale S

Enseignement obligatoire

- Durée de l'épreuve : 4 heures
- Coefficient 7

Ce sujet comporte 4 exercices.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : Probas (Polynésie spt 2011)–5 points

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de 3 niveaux ont répondu aux questions suivantes :

- A quel niveau est votre bureau ?
- Empruntez-vous l'escalier ou l'ascenseur pour vous y rendre ?

Les réponses sont les suivantes :

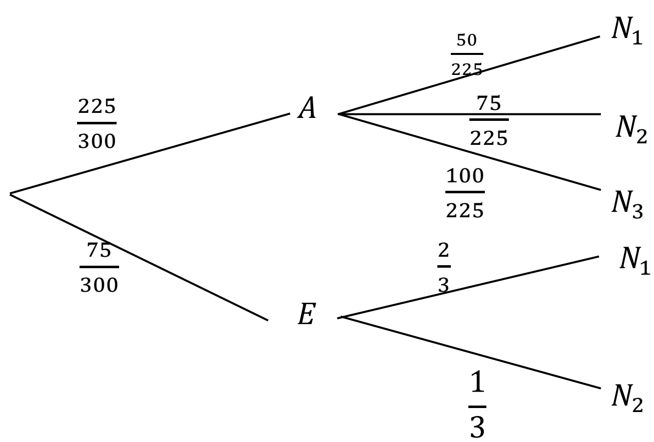
- 225 personnes utilisent l'ascenseur et parmi elles, 50 vont au premier niveau, 75 au deuxième niveau et 100 vont au troisième.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au deuxième niveau, les autres vont au premier niveau.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On pourra considérer les événements :

- N_1 : La personne va au 1er niveau
- N_2 : La personne va au 2ème niveau
- N_3 : La personne va au 3ème niveau
- E : La personne emprunte l'escalier

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



Attention, les nombres écrits sur les branches sont des probas, pas des effectifs (dons des fractions éventuellement simplifiées, inférieures à 1. Vous pouvez écrire un décimal mais pas une valeur décimale approchée, donner la valeur exacte.

2. a. Montrer que la probabilité que la personne interrogée aille au 2ème niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$. Ne pas confondre $P(N_2 \cap E)$ et $P_E(N_2)$.

$$P(N_2 \cap E) = P_E(N_2) \times P(E) = \frac{1}{3} \times \frac{75}{300} = \frac{1}{12}$$

b. Montrer que les événements N_1, N_2, N_3 sont équiprobables.
D'après la formule des probabilités totales, à bien citer !!

$P(N_1) = P_E(N_1) \times P(E) + P_A(N_1) \times P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{75}{300} + \frac{50}{225} \times \frac{225}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$.

De même, $P(N_2) = P_E(N_2) \times P(E) + P_A(N_2) \times P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{75}{300} + \frac{75}{225} \times \frac{225}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$.

Enfin, $P(N_3) = P_A(N_3) \times P(A) = \frac{100}{225} \times \frac{225}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier, sachant qu'elle va au 2ème niveau. Connaître et appliquer la formule des probas conditionnelles…

$$P_{N_2}(E) = \frac{P(E \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

3. On interroge désormais 3 personnes de cette population, et on suppose que leurs réponses sont indépendantes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux trois personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2ème niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. C'est le minimum à écrire !!!

$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $P(X = 1) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$,

$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$, $P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

b. D'après le résultat précédent, en moyenne, sur 3 personnes, combien vont au deuxième niveau ?

L'espérance de X est : $E(X) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{12}{27} \times 1 + \frac{6}{27} \times 2 + \frac{1}{27} \times 3 = 1$. En moyenne, une personne sur trois va au 2ème Niveau.

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population et on suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement A : « Au moins une personne va au 2ème niveau » soit supérieure ou égale à 0,99. Penser à l'événement contraire dans les cas d'événements décrits par « Au moins 1 ». Faire apparaître la répétition de l'issue : chacune des n personnes va à un autre étage (d'où la puissance n).

$\bar{A}$: « Personne ne va au 2ème niveau »

$P(\bar{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc $P(A) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. On aura donc $P(A) \geq 0{,}99$ ssi $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}99$ soit $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}01$.

D'où $n \ln\frac{2}{3} \leq \ln 0{,}01$ *ie* $n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ soit $n \geq 12$. A partir de 12 personnes interrogées, la probabilité de l'événement A : « Au moins une personne va au 2ème niveau » est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2 : Suites ex3 bblanc 2 FH – 6 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Ecrire au brouillon sans les calculer les premiers termes de la suite, et le terme général avec davantage de termes explicités dans la somme.

Partie A :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - 4n^2 - 6n - 2}{n(2n+2)(2n+1)} = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

2. En déduire le sens de variation de (u_n).

On a $n(2n+2)(2n+1) > 0$ et $-3n - 2 < 0$ pour tout entier naturel n non nul. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et (u_n) est décroissante.

3. Etablir alors que (u_n) est convergente. Penser automatiquement au théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée (ou minorée si décroissante) converge. **Il ne s'agit pas ici de déterminer la limite de la suite** mais seulement de prouver qu'elle admet une limite, qu'elle est convergente.

Cette suite est décroissante, et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

Partie B : L'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

1. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$ donc en sommant entre n et $2n$, il vient :

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et 0 on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Question facile venant du programme de 1èreS , il faut savoir le faire !

On a pour tout réel x distinct de -1 et 0 : $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{ax+a+bx}{x(x+1)} = \frac{a+(a+b)x}{x(x+1)}$.

On aura donc $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases}$ ie $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

D'où pour tout réel x distinct de -1 et 0,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$$

c. En déduire que tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} \\ &= \frac{n+1}{n(2n+1)} \end{aligned}$$

2. En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$$
$$ie\ 0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2n}\right) = 0.$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$.

3. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

On a : $f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \cdots + \frac{1}{2n} + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = u_n + \ln\left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} \times \ldots \times \frac{2n}{2n+1}\right) = u_n + \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = u_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

4. Conclure. Sur quoi ? Voir l'objectif annoncé en début de partie…

On a

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 3 : Complexes– 6 points

Les deux parties sont totalement indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A :

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 2 + i, z_B = -4 + 3i$ et $z_C = -2 - i$.

1. Donner la forme algébrique et la forme exponentielle du complexe $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. En déduire la nature du triangle ABC.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 + 3i + 2 + i}{2 + i + 2 + i} = \frac{-2 + 4i}{4 + 2i} = \frac{i(4 + 2i)}{4 + 2i} = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

La forme exponentielle de $i, -i, 1, -1$ n'a pas besoin d'être démontrée, c'est un acquis de TS.

On en déduit que $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CA}{CB} = 1\ donc\ CA = CB$.

D'où le triangle ABC est isocèle rectangle en C. Ne pas oublier « isocèle » !

2. On considère la rotation r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que son écriture complexe est $z' = iz + i - 3$.

Ecriture complexe d'une rotation à connaître ! $z' - z_C = e^{i\theta}(z - z_c)$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par r. Alors $\frac{z'-z_C}{z-z_C} = i$ soit $\frac{z'+2+i}{z+2+i} = i$.

D'où $z' + 2 + i = iz + 2i - 1$ et $z' = iz + i - 3$.

3. On appelle s la symétrie centrale de centre le milieu D de $[AB]$. Déterminer l'écriture complexe de s.

On a $z_D = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}(-2 + 4i) = -1 + 2i$. Affixe du milieu facile à calculer, le faire !

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par s. On peut aussi considérer que c'est une rotation d'angle π.

Alors $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DM'}$donc $z' + 1 - 2i = -1 + 2i - z$ soit $z' = -z - 2 + 4i$.

4. On s'intéresse à présent à la transformation géométrique $f = r \circ s$, composée de s et de r.

a. Quelle est l'image de B par f ?

$f(B) = r\big(s(B)\big) = r(A) = B$ car le triangle ABC est isocèle rectangle en C. Un simple dessin suffit à le voir…

b. Déterminer l'écriture complexe de f. C'est comme une composition de fonction.

$f(M) = M'$ avec $M(z), M'(z')$ et $M_1(z_1) = s(M)$.

Alors, $z' = -z_1 - 2 + 4i = -(iz + i - 3) - 2 + 4i = -iz + 3i + 1$.

c. Quelle est la nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\omega)$ avec $\omega = -i\omega + 3i + 1$. Donc $\omega = i + 2$.

Exercice 4 : 5 points - Corrigé

Partie A : restitution organisée de connaissance

On rappelle que $\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right) = +\infty$. Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

Posons $x = e^t$. Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $t = \ln x$tend également vers $+\infty$.

Alors on a $\frac{\ln x}{x} = \frac{t}{e^t}$. Donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right)^{-1} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur$[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et on a $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$. Donc sur $[1\,;\,+\infty[$, $g'(x) > 0$.

D'où g est croissante. Alors pour tout réel x de $[1\,;\,+\infty[$: $g(x) > g(1)$. Or $g(1) = 0$.

Donc g est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour tout x de $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et on a $f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;\,+\infty[$.

On a g positive sur $[1\,;\,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$. D'où la fonction f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

On a $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ et la droite (d) d'équation $y = x$ est bien une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (d).

On a $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$. Or $x > 0$et $\ln x > 0 \iff x > 1$. Donc sur $[1\,;\,+\infty[$, $f(x) - x < 0$ et courbe $\mathcal{C}$ est située sous la droite (d).

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et (d).

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points $M_k$et N_k est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln k}{k}$.

On a $M_k\big(k\,;f(k)\big) ie\ M_k\left(k\,;k - \frac{\ln k}{k}\right)$ et $N_k(k\,;k)$. D'où $M_kN_k = \frac{\ln k}{k}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.* Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Variables :

k, d : réels

Début

$d \coloneqq 1$

$k \coloneqq 2$

Tant que $d > 0.01$ faire

$d \coloneqq \frac{\ln k}{k}$

$k \coloneqq k + 1$

Fin tant que

Afficher « Le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_k N_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2} est : »

Afficher k

Fin