Angles orientés, Trigonométrie

I- Le cercle trigonométrique :

1.1- Abscisse curviligne :

Définitions :

- Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon OI = 1, orienté dans le sens direct (anti-horaire).

- Un point M du plan est repéré par son abscisse curviligne (voir enroulement de la droite réelle) α, exprimant en radians la longueur de l'arc orienté IM. On note $M(\alpha)$.

  Un point M du cercle trigonométrique possède une infinité d'abscisses curvilignes. Elles sont toutes de la forme :

$$\boxed{M(\alpha + k2\pi), k \in Z}$$

- La seule valeur de cette série qui soit comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est la mesure principale de l'abscisse curviligne de M.

Notation : Si α *et* β sont deux mesures d'une même abscisse curviligne, alors il existe un entier relatif k tel que $\alpha = \beta + 2k\pi$.

On note : $\boxed{\alpha \equiv \beta \quad [2\pi]}$, α et β sont égaux modulo π, ou α est congru à β modulo π.

⚠ Ce n'est pas une égalité au sens classique !

1.2- Mesure d'un arc orienté :

Définition : Les points A(a) et B(b) situé sur le cercle trigonométrique définissent un arc orienté $\widehat{AB}$. Alors une mesure de cet arc est : $\boxed{mes(\widehat{AB}) \equiv b - a \qquad [2\pi]}$.

II- Angles orientés :

2.1- Cas des vecteurs unitaires :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires (ie de norme 1) et $A(a)$ et $B(b)$ deux points du cercles trigonométriques tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ (noté aussi $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$) est $\boxed{mes(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \equiv b - a\ [2\pi]}$

Parmi ces mesures, une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$: c'est la mesure principale de l'arc orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Rqe : la valeur absolue de la mesure principale de l'arc orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemples importants :

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\begin{cases} (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou } (\vec{u}; \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\begin{cases} (\vec{u}; \vec{v}) \equiv 0\ [2\pi] \\ \text{ou } (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases}$
- En particulier : $(\vec{u}; \vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{-u}) \equiv \pi\ [2\pi]$

2.2- Cas général :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. L'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est par définition l'angle formé par les vecteurs unitaires $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\ \vec{u}$ et $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\ \vec{v}$.

2.3- Relation de Chasles :

Théorème : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ non nuls, on a :

$$(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{u}; \vec{w})\ \ [2\pi]$$

Conséquences : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls :

$$(\vec{v}\,; \vec{u}) \equiv -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ \ [2\pi]$$
$$(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \equiv (\vec{u}\,; -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ \ [2\pi]$$
$$(-\vec{u}\,; -\vec{v}) \equiv (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ \ [2\pi]$$
$$(k\vec{u}\,; k\vec{v}) \equiv (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ \ [2\pi],\ \ k \text{ réel non nul}$$

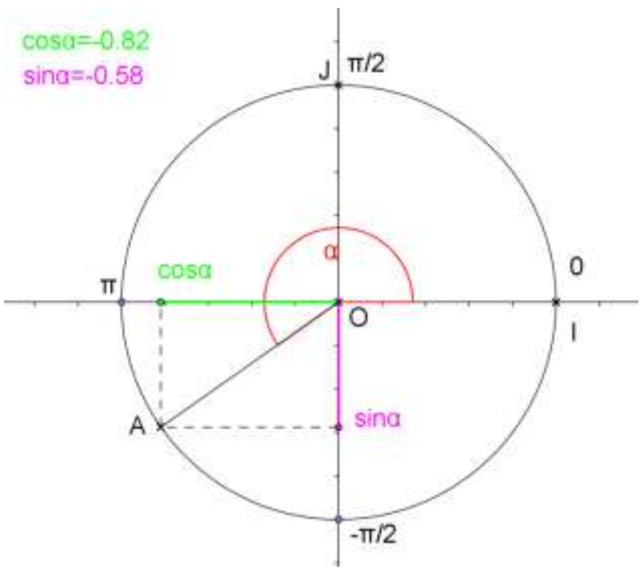
Dém en classe

III- Trigonométrie :

3.1- Cosinus et sinus :

Définition : Soit A un point du cercle trigonométrique et α une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right)$. On appelle cosinus de α et sinus de α les coordonnées du point A dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

On a donc $A(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ ou $\overrightarrow{OA} = \cos\alpha\ \overrightarrow{OI} + \sin\alpha\ \overrightarrow{OJ}$.



$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$
$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos\ (\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, k \in Z$$
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, k\ \epsilon Z$$

3.2- Valeurs remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

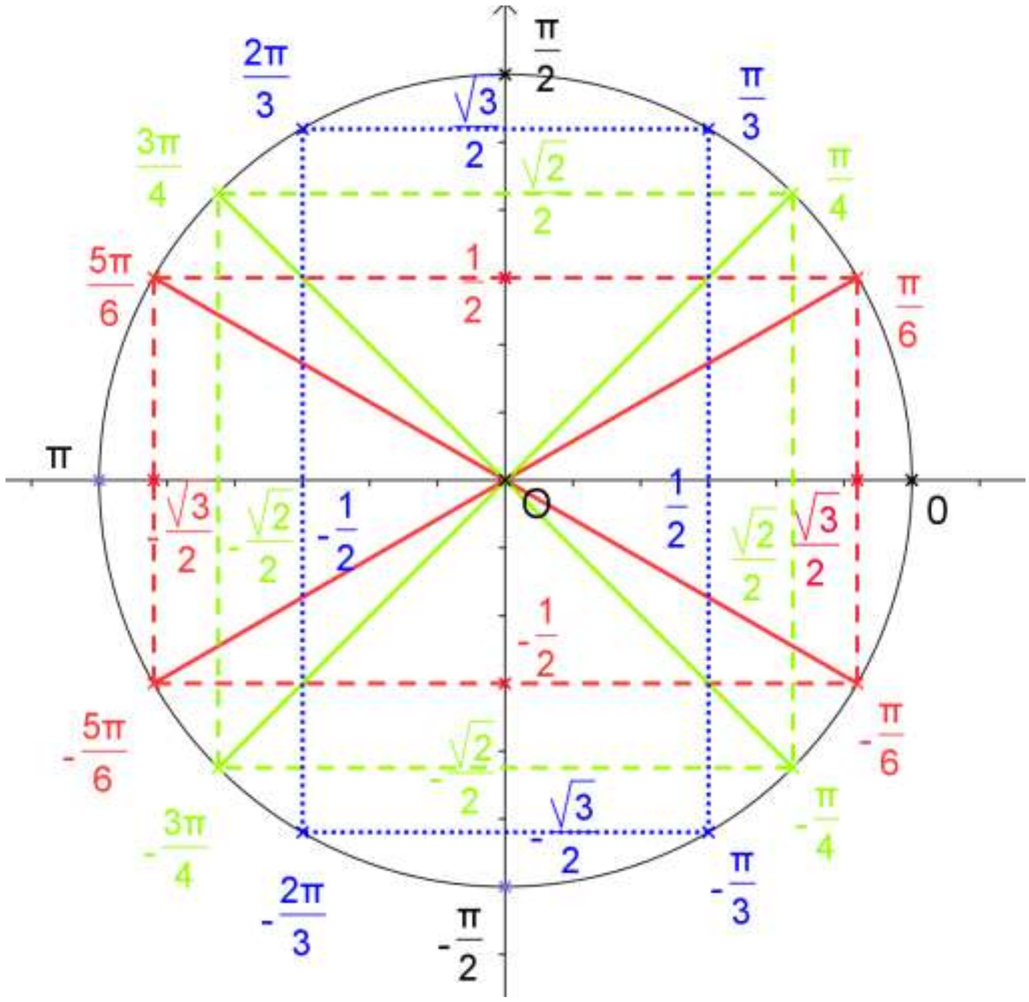
3.3- Lignes trigonométriques des angles associés :

Pour tout réel x, on a :

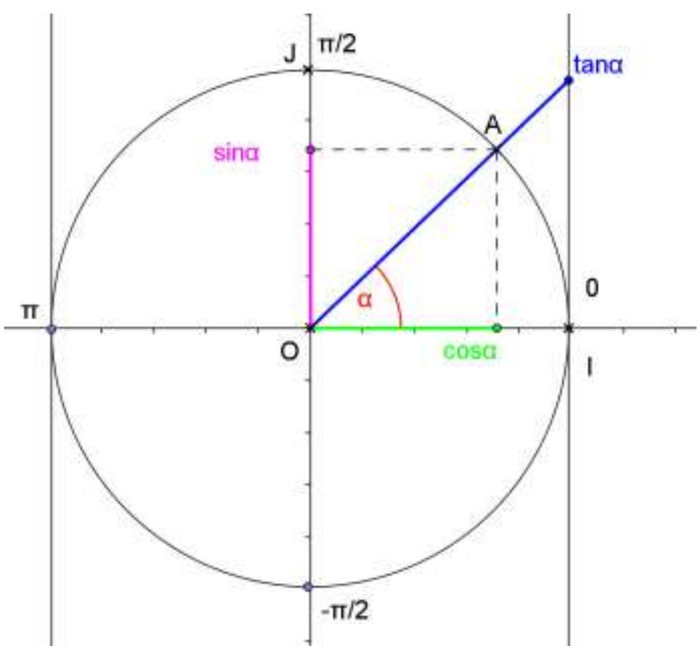
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(x+\pi) = -\cos x$ $\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

- Deux angles ont le même cosinus s'ils sont égaux ou opposés.
- Deux angles ont le même sinus s'ils sont égaux ou supplémentaires.



3.4- Tangente :



Soit A un point du cercle trigonométrique et α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OA})$.

Lorsque $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on appelle tangente de α le nombre défini par $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\tan\alpha \in IR$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

IV- Repérage polaire d'un point du plan :

4.1- Coordonnées polaires :

- Dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ direct du plan, tout point M du plan distinct de l'origine peut être repéré par un couple $(r\ ;\ \theta)$ où r est un réel strictement positif, θ un réel sont tels que : $\begin{cases} r = OM \\ \theta = mes\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi] \end{cases}$
- $(r\ ;\ \theta)$ est le couple de <u>coordonnées cartésiennes</u> du point M.

- En pratique, on privilégie la mesure principale de l'angle comme valeur de θ.
- Par convention, l'origine O du repère a pour coordonnées polaires $(0\ ;\ \theta)$ où θest un réel quelconque.

4.2- Lien avec les coordonnées cartésiennes :

<u>Propriété :</u> Soit M un point de coordonnées polaires $(\boldsymbol{r}\ ;\ \boldsymbol{\theta})$. Alors ses coordonnées cartésiennes sont

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

<u>Conséquence :</u> Soit M un point de coordonnées cartésiennes $(x\ ; y)$. Alors ses coordonnées polaires $(r\ ;\ \theta)$ sont

telles que $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ et \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$