

1ère S Angles orientés, Trigonométrie

I- Le cercle trigonométrique :

1.1- Abscisse curviligne :

Définitions :

- Dans un repère orthonormé (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) , le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon $OI = 1$, orienté dans le sens direct (anti-horaire).
- Un point M du plan est repéré par son abscisse curviligne (voir enroulement de la droite réelle) α , exprimant en radians la longueur de l'arc orienté IM . On note $M(\alpha)$.

Un point M du cercle trigonométrique possède une infinité d'abscisses curvilignes. Elles sont toutes de la forme :

$$M(\alpha + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

- La seule valeur de cette série qui soit comprise dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ est la mesure principale de l'abscisse curviligne de M .

Notation : Si α et β sont deux mesures d'une même abscisse curviligne, alors il existe un entier relatif k tel que $\alpha = \beta + 2k\pi$.

On note : $\boxed{\alpha \equiv \beta \quad [2\pi]}$, α et β sont égaux modulo π , ou α est congru à β modulo π .



Ce n'est pas une égalité au sens classique !

1.2- Mesure d'un arc orienté :

Définition : Les points $A(a)$ et $B(b)$ situés sur le cercle trigonométrique définissent un arc orienté \widehat{AB} .

Alors une mesure de cet arc est : $\boxed{mes(\widehat{AB}) \equiv b - a \quad [2\pi]}$.

II- Angles orientés :

2.1- Cas des vecteurs unitaires :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires (ie de norme 1) et $A(a)$ et $B(b)$ deux points du cercle trigonométriques tels que $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$.

Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ (noté aussi $(\vec{OA}; \vec{OB})$) est

$$\boxed{mes(\vec{u}; \vec{v}) \equiv b - a \quad [2\pi]}$$

Parmi ces mesures, une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: c'est la mesure principale de l'arc orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Rq : la valeur absolue de la mesure principale de l'arc orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{AOB} .

Exemples importants :

- Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux alors $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
- Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\begin{cases} (\vec{u}; \vec{v}) \equiv 0 [2\pi] \\ \text{ou } (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi [2\pi] \end{cases}$
- En particulier : $(\vec{u}; \vec{u}) \equiv 0 [2\pi]$ et $(\vec{u}; -\vec{u}) \equiv \pi [2\pi]$

2.2- Cas général :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. L'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est par définition l'angle formé par les vecteurs unitaires $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ et $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$.

2.3- Relation de Chasles :

Théorème : Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} non nuls, on a :

$$(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{u}; \vec{w}) \quad [2\pi]$$

Conséquences : Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} non nuls :

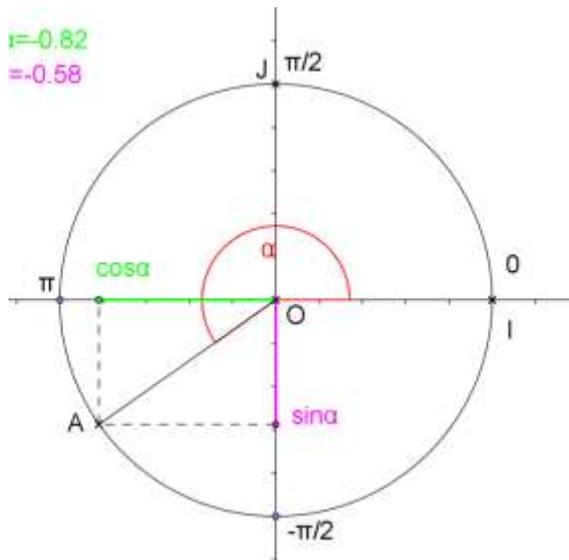
$$\begin{aligned} (\vec{v}; \vec{u}) &\equiv -(\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi] \\ (-\vec{u}; \vec{v}) &\equiv (\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \quad [2\pi] \\ (-\vec{u}; -\vec{v}) &\equiv (\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi] \\ (k\vec{u}; k\vec{v}) &\equiv (\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi], \quad k \text{ réel non nul} \end{aligned}$$

III- Trigonométrie :

3.1- Cosinus et sinus :

Déf : Soit A un point du cercle trigonométrique, α une mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OA})$. On appelle *cosinus de α* et *sinus de α* les coordonnées du point A dans le repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

On a donc $A(\cos \alpha; \sin \alpha)$ ou $\vec{OA} = \cos \alpha \vec{OI} + \sin \alpha \vec{OJ}$.



$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos \alpha \\ \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin \alpha \\ k &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.2- Valeurs remarquables :

Et à connaître par cœur...

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3.3- Lignes trigonométriques des angles associés :

Pour tout réel x , on a :

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + \pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

- Deux angles ont le même cosinus s'ils sont égaux ou opposés.
- Deux angles ont le même sinus s'ils sont égaux ou supplémentaires.

