

DS (3h) - Problèmes de degré 2 – sujet A

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Le sujet est à rendre avec la copie, veuillez à bien mettre votre nom.

Le sujet comporte 2 pages. Faites apparaître clairement sujet A sur votre copie.

NOM :

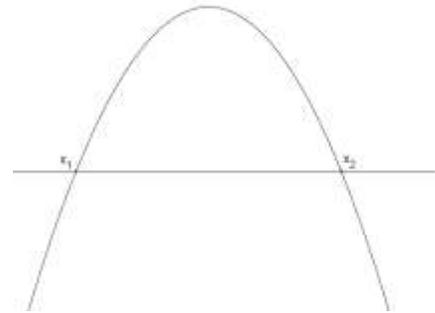
Exercice 1 : (6 points) Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, justifier (un schéma avec un texte explicatif pourra être utilisé).

1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole \mathcal{P} de sommet S .

- (a) Quand a est positif et Δ négatif, alors S est situé au-dessus de l'axe des abscisses.
- (b) Quand Δ est positif et S est situé au-dessus de l'axe des abscisses, alors a est négatif.
- (c) L'ordonnée de S est toujours du même signe que Δ .

2. Soit g une fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole \mathcal{P} ci-contre (on ne représente pas l'axe des ordonnées, dont la position peut varier).

- (a) a peut être positif.
- (b) Si $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$ alors le sommet est d'abscisse 2.
- (c) Si x_1 et x_2 ont le même signe alors c est un nombre négatif.



Exercice 2 : (6 points) Résoudre les équations suivantes :

1. $4x^2 + 8x + 3 = 0$
2. $\sqrt{2}x^2 - 3x - \sqrt{8} = 0$
3. $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

Exercice 3 : (6 points)

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équation et inéquation suivantes :
 - (a) $-3x^2 - 5x + 2 = 0$
 - (b) $2x^2 + 5x - 12 \geq 0$
2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{\sqrt{-3x^2 - 5x + 2}}$$

Exercice 4 : (4 points) Polynôme de degré 3.

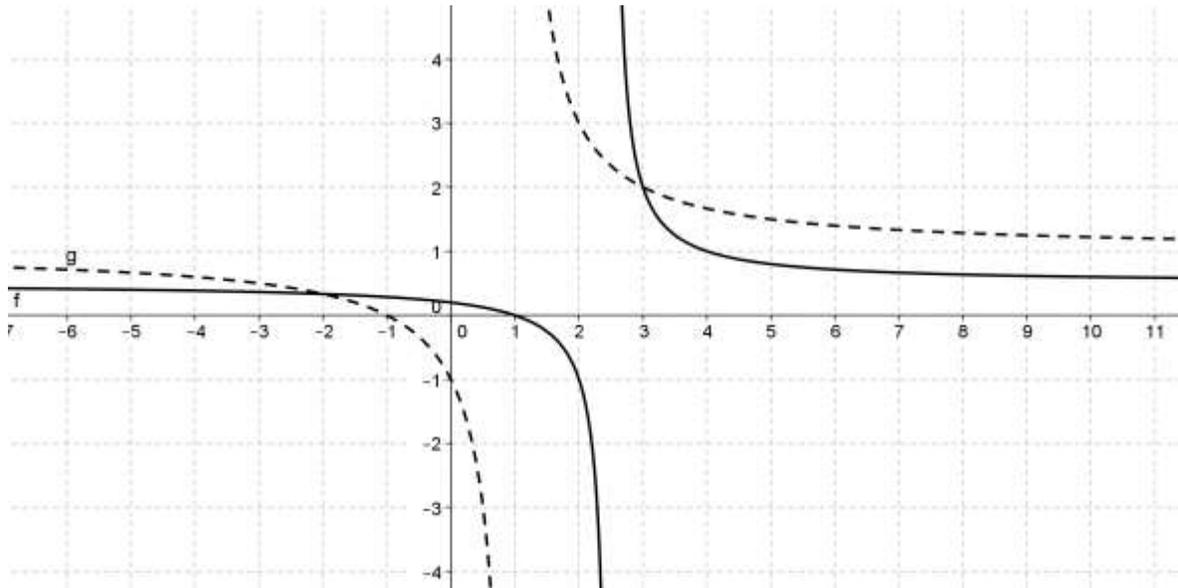
- (a) Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$.
- (b) En déduire sa factorisation sous la forme du produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.
- (b) Résoudre alors dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 5 : (8 points) Position relative de deux courbes :

On donne les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ et $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

On veut déterminer la position relative des deux courbes représentatives de f et g représentées ci-dessous :



- (a) Conjecturer la réponse sur le graphique ci-dessus (les lectures graphiques sont nécessairement approximatives).
- (b) Prouver la conjecture à l'aide d'une étude de signe.

BONUS : si vous avez tout fini, pour ne pas vous ennuyer....

Parmi tous les rectangles ayant un périmètre fixe, déterminer celui dont l'aire est maximale.

DS (3h) - Problèmes de degré 2 – sujet B

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Le sujet est à rendre avec la copie, veillez à bien mettre votre nom.

Le sujet comporte 2 pages. Faites apparaître clairement sujet B sur votre copie.

NOM :

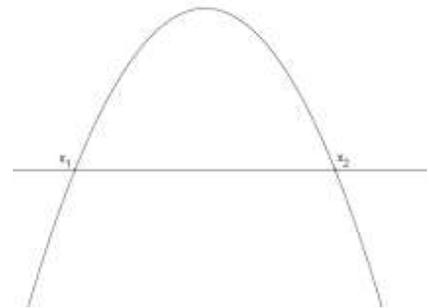
Exercice 1 : (6 points) Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, justifier (un schéma avec un texte explicatif pourra être utilisé).

1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole \mathcal{P} de sommet S .

- (a) Quand a est négatif et Δ positif, alors S est situé au-dessus de l'axe des abscisses.
- (b) L'ordonnée de S est toujours du même signe que Δ .
- (c) Quand Δ est négatif et S est situé au-dessus de l'axe des abscisses, alors a est négatif.

2. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole \mathcal{P} ci-contre :

- (a) a et c sont de signes contraires.
- (b) Si $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$ alors c est un nombre positif.
- (c) Si x_1 et x_2 ont le même signe alors c est un nombre négatif.



Exercice 2 : (6 points) Résoudre les équations suivantes :

- 1. $8x^2 - 10x + 3 = 0$
- 2. $\sqrt{2}x^2 - 3x - 5\sqrt{2} = 0$
- 3. $x^4 - 15x^2 + 36 = 0$

Exercice 3 : (6 points) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- 1. Résoudre dans \mathbb{R} les équation et inéquation suivantes :
 - (a) $-3x^2 + 10x + 8 > 0$
 - (b) $x^2 - 2x - 3 = 0$
- 2. En déduire l'ensemble de définition de :

$$f(x) = \frac{\sqrt{-3x^2 + 10x + 8}}{x^2 - 2x - 3}$$

Exercice 4 : (4 points) Polynôme de degré 3.

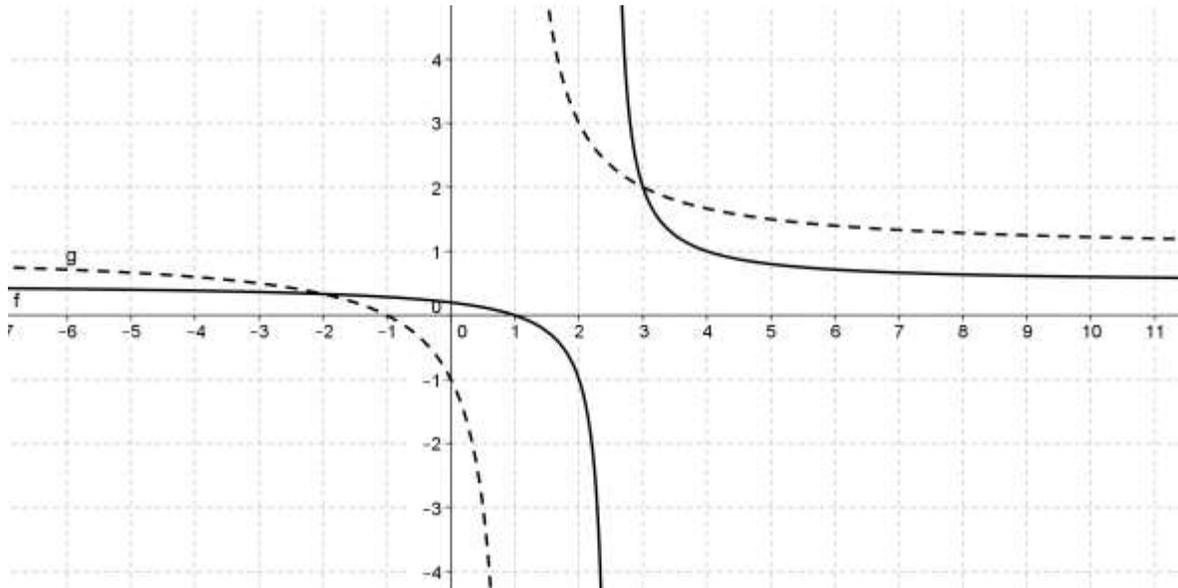
- (a) Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$.
- (b) En déduire sa factorisation sous la forme du produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.
- (c) Résoudre alors dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 5 : (8 points) Position relative de deux courbes :

On donne les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ et $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

On veut déterminer la position relative des deux courbes représentatives de f et g représentées ci-dessous :



- Conjecturer la réponse sur le graphique ci-dessus (les lectures graphiques sont nécessairement approximatives).
- Prouver la conjecture à l'aide d'une étude de signe.

BONUS : si vous avez tout fini, pour ne pas vous ennuyer....

Parmi tous les rectangles ayant un périmètre fixe, déterminer celui dont l'aire est maximale.