TL

Chapitre 1 : Continuité, convexité, étude de fonctions

Savoir :

- Formules de dérivées
- Equation de la tangente
- Définition de convexité et concavité
- Conditions d'utilisations du TVI

Savoir Faire :

- Reconnaître si une fonction est continue d'après son graphe
- Résoudre une équation graphiquement
- Reconnaître graphiquement si une fonction est convexe ou concave
- Déterminer graphiquement un point d'inflexion
- Déterminer, parmi plusieurs courbes, celle qui est la dérivée d'une fonction de graphe donné
- Tracer une tangente en connaissant son équation
- Etudier les variations d'une fonction
- Utiliser le TVI (remplir le tableau de variations afin de pouvoir s'y référer)
- Savoir approximer la solution d'une équation du type $f(x) = m$ à l'aide de la calculatrice (en donnant toutes les étapes)
- Déduire le signe d'une fonction de son tableau de variations complet
- Utiliser le signe de la dérivée seconde pour déterminer si une fonction est concave ou convexe.

TL

Chapitre 1 : Continuité, convexité, étude de fonctions

Savoir :

- Formules de dérivées
- Equation de la tangente
- Définition de convexité et concavité
- Conditions d'utilisations du TVI

Savoir Faire :

- Reconnaître si une fonction est continue d'après son graphe
- Résoudre une équation graphiquement
- Reconnaître graphiquement si une fonction est convexe ou concave
- Déterminer graphiquement un point d'inflexion
- Déterminer, parmi plusieurs courbes, celle qui est la dérivée d'une fonction de graphe donné
- Tracer une tangente en connaissant son équation
- Etudier les variations d'une fonction
- Utiliser le TVI (remplir le tableau de variations afin de pouvoir s'y référer)
- Savoir approximer la solution d'une équation du type $f(x) = m$ à l'aide de la calculatrice (en donnant toutes les étapes)
- Déduire le signe d'une fonction de son tableau de variations complet
- Utiliser le signe de la dérivée seconde pour déterminer si une fonction est concave ou convexe.

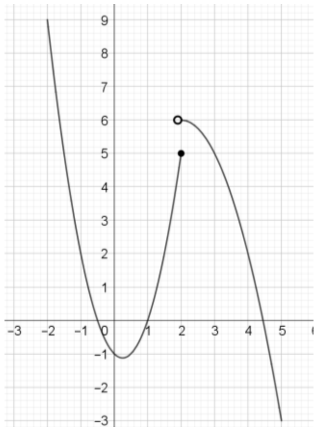
TL 02/10/2017

NOM : ……………………………………………………………

DS1 – Etude de fonction

Exercice 1 : (4 points) Exploitation d'une représentation graphique

On considère la fonction f définie sur $[-2;5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



Dire si chaque affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1. La fonction f est continue sur $[-2\,;5]$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2. L'équation $f(x) = -2$ a une unique solution dans $[-2;5]$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3. L'équation $f(x) = 5{,}5$ a une deux solutions dans $[-2;5]$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

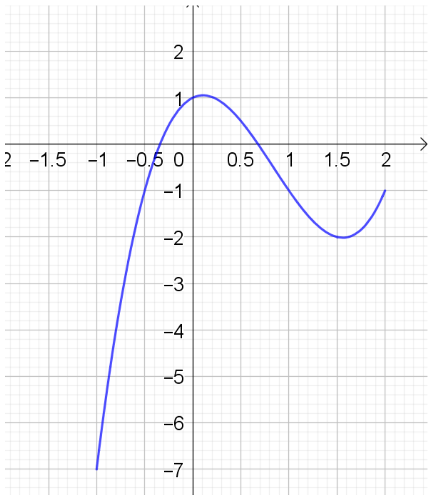
4. La fonction f est concave sur $[-2;2]$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

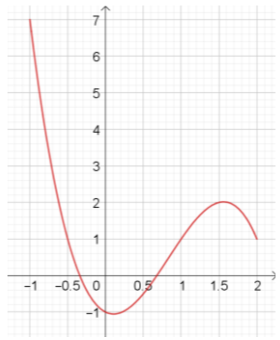
Exercice 2 : (5 points) Lectures graphiques : On considère la fonction f définie sur $[-1;2]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



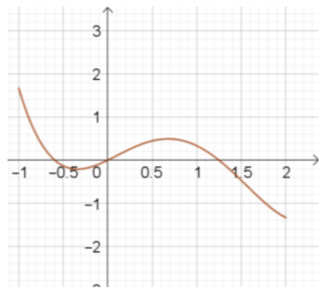
1. A l'aide de la courbe, déterminer approximativement la convexité de la fonction f. Préciser le(s) point(s) d'inflexion le cas échéant.

2. Parmi les 3 courbes ci-dessous, l'une est la dérivée de f. Déterminer laquelle et justifier.

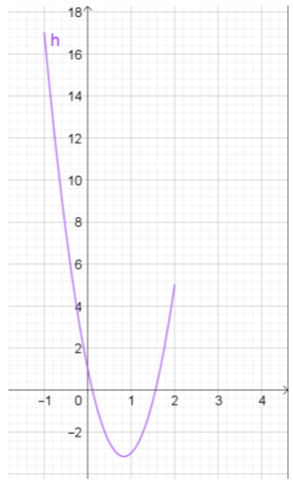
3. Utiliser le résultat précédent et la courbe de f pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 puis tracer cette tangente sur la courbe donnée ci-contre.



Courbe A



Courbe B



Courbe C

Exercice 3 : (11 points) Etude de fonction :

On considère la fonction f définie sur $[1{,}5\,;5]$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$

1. **Etude d'une fonction auxiliaire :**

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

d) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. **Etude de la fonction f :**

a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}5\,;5]$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

b) En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[1{,}5\,;5]$.

c) Construire le tableau de variations de f sur $[1{,}5\,;5]$.

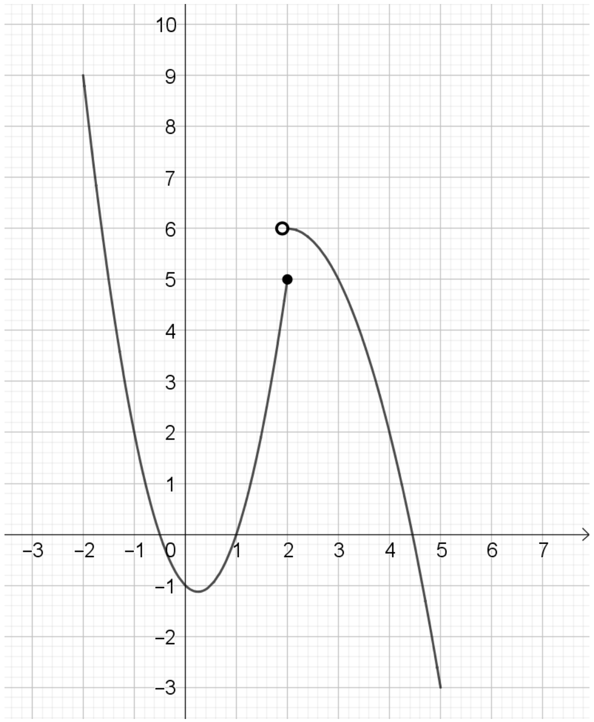
d) Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir pour tout réel x de $[1{,}5\,;5]$:

$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x-1)^3}$. La fonction f est-elle concave ou convexe sur $[1{,}5\,;5]$?

TL /09/2017

DS1 – Etude de fonction- Eléments de correction

Exercice 1 : (points) On considère la fonction f définie sur $[-2; 5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



Dire si chaque affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1. La fonction f est continue sur $[-2\,;5]$.

FAUX : elle n'est pas continue en 2 : on voit une rupture de la courbe au point d'abscisse 2.

2. L'équation $f(x) = -2$ a une unique solution dans $[-2; 5]$.

VRAI : la droite horizontale d'équation $y = -2$ coupe une seule fois la courbe.

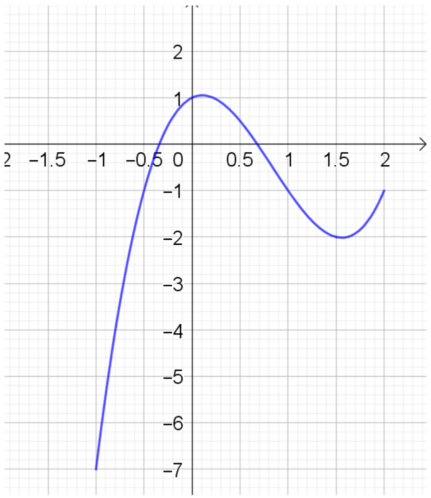
3. L'équation $f(x) = 5{,}5$ a une unique solution dans $[-2; 5]$.

FAUX : Il y en a une « à gauche » pour $x \approx -1{,}6$ et une autre « à droite » pour $x \approx 2{,}7$.

4. La fonction f est concave sur $[-2; 2]$.

FAUX : Elle est convexe car située au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle.

Exercice 2 : (points) Lectures graphiques : On considère la fonction f définie sur $[-1; 2]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



1. A l'aide de la courbe, déterminer approximativement la convexité de la fonction f. Préciser les points d'inflexion le cas échéant.

La fonction est concave sur $[-1; 1]$ puis concave sur $[1; 2]$. Le point d'inflexion semble être en $A(1\,;\,-1)$

2. Parmi les 3 courbes ci-dessous, l'une est la dérivée de f. Déterminer laquelle et justifier.

La dérivée de f doit être positive là où f est croissante : sur $[-1\,;0{,}2]$ $(environ)$ et sur $[1{,}5\,;2]$. Elle doit être négative ailleurs. Il s'agit donc de la courbe C.

3. Utiliser le résultat précédent et la courbe de f pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 puis tracer cette tangente sur la courbe donnée ci-contre.

L'équation de cette tangente est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

On lit $f'(1)$ sur la courbe C : $f'(1) \approx -3$ (app) et $f(1)$ sur la courbe de f : $f(1) = -1$.

D'où l'équation $y = -3(x-1) - 1 = -3x + 2$.

Exercice 3 : (11 points) Etude de fonction :

On considère la fonction f définie sur $[1{,}5\,;5]$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$

1. **Etude d'une fonction auxiliaire :**

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

On a $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

g' est un polynôme de degré 2. Le signe de g' est donc le signe de a $= 6$ en dehors des racines 0 et 1.

D'où les variations :

x	$1{,}5$		5
Signe de $g'(x)$		$+$	
Variations de g	-1	$\nearrow$	174

b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α entre 1,5 et 5.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

A l'aide de la calculatrice :

$g(1) < 0$ et $g(2) > 0$ donc $1 < \alpha < 2$

$g(1{,}6) < 0$ et $g(1{,}7) > 0$ donc $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$

$g(1{,}67) < 0$ et $g(1{,}68) > 0$ donc $1{,}67 < \alpha < 1{,}68$

$g(1{,}677) < 0$ et $g(1{,}678) > 0$ donc $1{,}677 < \alpha < 1{,}678$

On end éduit que $\alpha \approx 1{,}68$ à 10^{-2} près.

d) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

x	$1{,}5$		α		5
Variations de g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	174
SIGNE DE g		$-$	0	$+$	

2. **Etude de la fonction f :**

a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}5\,;5]$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

On a $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)-(x^3+1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3-3x^2-x^3-1}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

b) En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[1{,}5\,;5]$.

Etant donné que $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} > \mathbf{0}\ \boldsymbol{sur}$ $[1{,}5\,;5]$, f' est du même signe que g. Or on a déterminé le signe de g à la fin de la partie 1.

D'où le signe de f' ci-dessous

c) Construire le tableau de variations de f sur $[1{,}5\,;5]$.

x	$1{,}5$	α	5
Signe de f'	$-$	0	$+$
Variations de f	$8{,}75$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $31{,}5$

d) Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir pour tout réel x de $[1{,}5\,;5]$:

$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x-1)^3}$. La fonction f est-elle concave ou convexe sur $[1{,}5\,;5]$?

Pour $\boldsymbol{x} > \mathbf{1}, (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{3}} > \mathbf{0}$ **donc** $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}\ \boldsymbol{sur}$ $[1{,}5\,;5]$.

On en déduit que f est convexe sur $[1{,}5\,;5]$.